Leibniz Universität
Hannover

Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
Dr. Pieter Naaijkens

Lie-Algebren und ihre Darstellungen in der Physik
Übung vom 13.05.2014

Übungsstunde 2

Aufgabe 2: Rekonstruktion Lie-Algebren
Die Zusammenhängende Dynkin-Diagramme klassifizieren die (Äquivalenzklassen von) einfache Lie-Algebren. Dementsprechend ist es möglich aus dem Dynkin-Diagramm die Lie-Algebra zu rekonstruieren. In dieser Aufgabe sollen wir das anhand eines Beispiels machen. Betrachten Sie dazu folgendes Dynkin-Diagramm:

Die entsprechende Lie-Algebra gehört zu den sogenannten „exzeptionellen Lie-Algebren".

a.) Ermitteln Sie die Cartan-Matrize und bestimmen Sie die primitive (einfache) Wurzeln.

Sei Δ die Menge Wurzeln, Δ^+ die positive Wurzeln und $\Pi \subset \Delta$ die einfache (primitive) Wurzeln. Wir können jede $\alpha \in \Delta$ schreiben als $\alpha = \sum_{\beta\in\Pi} k_\beta \beta$, mit $k_\beta \in \mathbb{Z}$. Die Summe $\sum_{\beta\in\Pi} |k_\beta|$ heißt die *Stufe* oder das *Level* (auf englisch manchmal auch „height") von der Wurzel α. Die positive Wurzeln sind genau die Wurzeln mit $k_\beta \geq 0$ für jede $\beta \in \Pi$. Die Wurzeln in Π sind per Definition die einzige positive Wurzeln auf Stufe eins. Eine wichtige Eigenschaft ist das $\alpha - \beta$ keine Wurzel ist für $\alpha, \beta \in \Pi$.
Sei jetzt β eine Wurzel. Für $\alpha \in \Delta$ können wir die Kette von Wurzeln $\beta + r\alpha, \beta + (r-1)\alpha, \ldots, \beta - q\alpha$ betrachten, mit $r, q \in \mathbb{N}_0$. Die Menge R ist endlich, also gibt es $r, q \leq \infty$ so dass jedes Element aus der Kette eine Wurzel ist, und es keine längere Kette von Wurzeln gibt (es gilt sogar dass die maximale Länge gleich vier ist). Diese Zählen erfüllen die Gleichungen

$$q + r = 2\frac{\langle \beta + p\alpha, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}, \quad q - r = \frac{2\langle \beta, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}.$$

b.) Sei $\beta \in \Delta^+ \setminus \Pi$. Beweisen Sie dass es ein $\alpha \in \Pi$ gibt mit $\beta - \alpha \in \Delta$. *Hinweis:* zeigen Sie das $\langle \beta, \beta\rangle \leq 0$ wenn es keine solche α gibt.

c.) Bestimmen Sie alle positive Wurzeln und zeichnen Sie das Wurzelsystem Δ. *Hinweis:* Verwenden Sie vollständige Induktion nach die Stufe n.

d.) Die Lie-algebra die wir suchen hat zwei einfache Wurzeln, und deswegen wird jede Cartan-Unteralgebra durch zwei Elemente H_α, H_β erzeugt (mit α, β die einfache Wurzeln). Berechnen Sie die Kommutatoren $[H_\alpha, E_\beta]$ für α einfache und β beliebige Wurzeln.

e.) Ermitteln Sie $[E_\alpha, E_{-\alpha}]$ mit $\alpha \in \Delta$.

Es fehlen noch $[E_\alpha, E_\beta]$ mit $\alpha \neq \beta$. Man kann in diesem Fall zeigen dass $[E_\alpha, E_\beta] \subset \mathbb{C}E_{\alpha+\beta}$ wenn $\alpha + \beta \in \Delta$, und gleich null falls $\alpha + \beta \neq \Delta$ (der Fall $\alpha + \beta = 0$ haben wir schon betrachtet). Definieren wir jetzt $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha,\beta}$, $\alpha + \beta \in \Delta$. Durch das multiplizieren von E_α mit einem Skalar, können wir die $N_{\alpha,\beta}$ ändern. Nicht jede $N_{\alpha,\beta}$ kann aber unabhängig gewählt werden: sei $\alpha + j\beta, \alpha + (j-1)\beta, \ldots \alpha - k\beta$ eine Kette Wurzeln. Dann gilt es

$$N_{\alpha,\beta} N_{-\alpha,\alpha+\beta} = \frac{j(k+1)\langle \alpha, \alpha\rangle}{2}.$$

Es ergebt sich eine konsistente Wahl wann wir folgende Bedingungen stellen:

$$N_{\alpha,\beta} = -N_{\beta,\alpha} = -N_{-\alpha,-\beta} = N_{-\beta,-\alpha}.$$

Bei einer solcher Wahl spricht man von *Cartan-Weyl-Normalisierung*, und diese Normalisierung werden wir hier verwenden.

f.) Ermitteln Sie die übrige Kommutatoren $[E_\alpha, E_\beta]$. Das vervollständigt die Rekonstruktion der Lie-Algebra.